Application of the Leslie Matrix to Birth Rates and Life Expectancy of Women in West Papua Province

Junianto Sesa, S.Si., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA DAN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PAPUA

2024

Lembar Pengesahan

Judul Penelitian : Application of the Leslie Matrix to Birth Rates and Life Expectancy of Women in West Papua Province

Bidang Fokus : Matematika

NIP : 199206242020121002

Nama : Junianto Sesa., S.Si., M.Si

NIDN : 0024069203

Pangkat/Golongan: Asisten Ahli/IIIb

Mengetahui,
Dekan FMIPA Unipa,

Markus H. Langsa, S.Si, M.Sc, Ph.D

NIP:. 197510182000031001

Peneliti,

Junianto Sesa, S.Si., M.Si

NIP. 199206242020121002

Application of the Leslie Matrix to Birth Rates and Life Expectancy of Women in West Papua Province

Penerapan Matriks Leslie pada Angka Kelahiran dan Harapan Hidup Wanita di Provinsi Papua Barat

Junianto Sesa[1*]

*) Jurusan Matematika dan Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Papua
Email: j.sesa@unipa.ac.id

Abstract

The purpose of this study is to determine the number of female population in West Papua Province with birth rate and life expectancy using eigenvalues and eigenvectors, and to determine the limiting age distribution using the Leslie matrix model. The eigenvector is used to determine the number of female population from each age interval, while the eigenvalue is used to determine the population growth rate. The research method used is to collect research data and analyze the data, then draw conclusions. The data used was obtained from BPS West Papua Province, namely, Population Projections by age group in 2010-2020. The results of this study are the Leslie matrix model for the female population in West Papua Province is a discrete model divided into fourteen age interval classes constructed using fertility rates and life expectancy. The conclusion obtained is that the total female population in West Papua Province tends to increase with a positive eigenvalue greater than one or the female growth rate of West Papua Province tends to be positive.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, Leslie matrix

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya populasi wanita di Provinsi Papua Barat dengan angka kelahiran dan harapan hidup menggunakan nilai eigen dan vector eigen, serta mengetahui distribusi umur pembatas menggunakan model matriks Leslie. Vektor eigen digunakan untuk menentukan banyaknya populasi wanita dari masing-masing interval umur, sedangkan nilai eigen digunakan untuk menentukan laju pertumbuhan populasi. Metode penelitian yang digunakan adalah mengumpulkan data penelitian dan menganalisis data, selanjutnya menarik kesimpulan. Data yang digunakan di peroleh dari BPS Provinsi Papua Barat yaitu, Proyeksi Penduduk menurut golongan umur tahun 2010-2020. Hasil penelitian ini adalah model matriks Leslie untuk populasi Wanita di Provinsi Papua Barat adalah model diskrit yang di bagi atas empatbelas kelas interval umur yang dikonstruksikan menggunakan angka kesuburan dan harapan hidup. Kesimpulan yang diperoleh adalah jumlah populasi wanita di Provinsi Papua Barat cenderung mengalami kenaikan dengan nilai eigen

positif lebih besar dari satu atau laju pertumbuhan wanita Provinsi Papua Barat cenderung bernilai positif.

Kata kunci: nilaieigen, vektoreigen, matriks Leslie

1. PENDAHULUAN

Pertumbuhan populasi wanita salah satu hal penting yang harus diamati, karenasalah satu peran wanita adalah menentukan perkembangan populasi manusia dimasa depan, sebab tanpa peran wanita populasi tidak dapat berkembang [4]. Perubahan jumlah populasi dipengaruhi oleh keadaan internal, yaitu kelahiran, kematian dan ketahanan hidup. Perubahan jumlah suatu populasi disebut pertumbuhan populasi [13]. Pertumbuhan populasi dapat memberikan informasi apakah jumlah populasi untuk tahun berikutnya selalu meningkat, menurun atau tetap. Banyak model yang dapat digunakan dalam menjelaskan pertumbuhan populasi. Model yang biasa digunakan para ahli kependudukan adalah model Leslie. Model Leslie menggunakan pendekatan matematika yaitu matriks. Tingkat kesuburan dan ketahanan hidup wanita merupakan salah satu faktor yang mempengaruhi estimasi populasi wanita pada tahun-tahun berikutnya menggunakan matriks Leslie [1].

Penelitian sebalumnya terkait matriks Leslie adalah penelitian [4], Matriks Leslie untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan di Provinsi Riau pada tahun 2017. Yang memperoleh hasil jumlah populasi perempuan di Provinsi Riau cenderung mengalami peningkatan. Selain itu, penelitian [13], Matrik Leslie untuk mencari nilai eigen yang dominan dengan beberapa faktor yang berpengaruh dalam pertumbuhan populasi yaitu kesuburan, ketahanan hidup dan rentan umur populasi. diperoleh nilai eigen yang dominan sehingga menunjukkan pertumbuhan populasi pada domba betina cenderung naik. Serta penelitian [7], Matriks Leslie dan Aplikasinya dalam Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Penduduk di Kota Makassar. Hasil pengaplikasian Matriks Leslie menunjukkan prediksi jumlah penduduk perempuan di Kota Makassar Tahun 2017 dalam perhitungan skala satu tahun maupun dua tahun cenderung meningkat. Dan peneitian [12], analisis Implementasi Matriks Leslie dalam Estimasi Laju Pertumbuhan Populasi Wanita di Kabupaten Situbondo. Dengan hasil Laju pertumbuhan Wanita di Kabupaten Situbondo pada Tahun 2023 mengalami penurunan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Angka Kelahiran Spesifik

Angka kelahiran menurut umur adalah banyaknya kelahiran selama setahun per 1000, 100.000, atau 1.000.000 wanita pada kelompok umur tertentu [9].

2.2 Angka Harapan Hidup

Angka Harapan Hidup (AHH) merupakan salah satu indicator yang digunakan untuk menilai derajat kesehatan penduduk. Angka Harapan Hidup suatu wilayah berbeda dengan wilayah lainnya tergantung oleh kualitas hidup yang bisa dicapai oleh penduduk [10].

2.3 Matriks

Menurut [8], Matriks adalah susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi Panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom, dan diletakkan diantara dua tanda kurung. Sedangkan menurut [5], sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat berorde n ($square\ matriks\ of\ orde\ n$), dan entri-entri $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ dikatakan berada pada diagonal utama dari A. Bila A adalah matriks yang mempunyai$n$ baris dan n kolom (bertipe $n \times n$), maka A dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.4 Matriks Leslie

Matriks Leslie adalah matriks bujur sangkar dengan jumlah baris dan kolom yang sama dengan vektor populasi yang memiliki elemen. Sel (i, j) dalam matriks menunjukkan berapa banyak individu yang akan berada dikelas usia i pada jangka waktu berikutnya untuk setiap individu di tahap j . MatriKs Leslie ditemukan oleh seorang pakar Ekologi bernama Patrick H. Leslie pada tahun 1945. Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi laju pertumbuhan suatu populasi. Dalam pertumbuhan populasi terdapat beberapa faktor yang mempengaruh, yaitu tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup dan rentang umur dari populasi. Yang disebut pertumbuhan populasi yaitu adanya perubahan jumlah dari suatu populasi. Pertumbuhan populasi dapat memberikan informasi seberapa besar perubahan jumlah populasi untuk tahun berikutnya [4].

Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Peubah yang diamati dalam penelitian ini adalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks Leslie. Nilai-nilai eigen dari L adalah akar-akar dari polinomial karakteristiknya. Polinomial karakteristik dari matriks Leslie adalah:

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} \ldots . a_nb_1b_2 \ldots . b_{n-1}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sebuah vektor eigen dari matriks Leslie L yang terkait dengan λ_1 jika dan hanya jika **x** adalah solusi non trivial dari $(\lambda I - L)\mathbf{x} = 0$.

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Menurut [8], jIka A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka vektor tak nol **x** pada R^n dinamakan vektor eigen(*eigen vector*) dari A jika A**x** adalah kelipatan scalar dari **x** ; yakni A**x** = $\boldsymbol{\lambda}$**x** untuk skalar sebarang $\boldsymbol{\lambda}$**.** Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka A**x** = $\boldsymbol{\lambda}$**x** dapat ditulis ulang sebagai $\boldsymbol{\lambda}$**x** = λI**x**atau ekuivalen dengan $(\lambda I - A)\ \mathbf{x} = 0$. Agar λ menjadi nilai eigen, harus ada solusi tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)\ \mathbf{x} = 0$, yang diperoleh jika dan hanya jika det$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$.

Persamaan det*(λI–A) =0* disebut persamaan karakteristik *(characteristic equation)* dari A; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka det*(λI – A)* adalah polinomial p dalam variabel λ yang dinamakan polinomial karakteristik *(characteristic polynomial)* dari *A*. Polinomial karakteristik *p*(x) dari sebuah matriks $n \times n$ mempunyai bentuk:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \cdots + C_n$$

2.6 Matriks Leslie

Pada model Leslie, wanita (betina) dibagi menjadi kelompok dengan kurun waktu yang sama. Contohnya umur maksimum yang dicapai wanita dalam populasi adalah *M* tahun (satuan waktu yang lain) kemudian populasi tersebut dibagiatas *n* kelompok umur. Sehingga kurun waktu pada kelompok *M/n* tahun. Kelompok umur akan dijelaskan pada tabel 3.1

Tabel 3.1 Kelompok Umur dan Interval

KelompokUmur	Interval
1	$[\,0, M/n\,]$
2	$[\,M/n\,, 2M/n\,]$
3	$2M/n, 3M/n$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)$	$[(n-2)2M/n,(n-1)\,M/n\,]$
n	$[(n-1)\,M/n\,, M]$

misalkan banyaknya wanita di setiap kelas ke-n pada waktu $t = 0$. Secara khusus, $x_1{}^{(0)}$ wanita/betina di kelompok pertama, $x_2{}^{(0)}$ wanita/betina dikelompok kedua, dan seterusnya. Bilangan ke-n ini di bentuk sebuah vektor kolom $\mathbf{x}^{(0)}$ yaitu:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1{}^{(0)} \\ x_2{}^{(0)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(0)} \end{bmatrix},$$

Vektor ini disebut vektor distribusi umur awal.

seberjalannya waktu, banyak wanita/betina dalam setiap kelompok ke-n akan berubah disebabkan tiga proses biologis, yakni: kelahiran, kematian dan penuaan. Dengan penjelasan ketiga proses tersebut secara kuantitatif, dapat dilihat cara memproyeksikan vektor distribusi umur mula-mula ke masa depan. Cara termudah mempelajari proses penuaan yaitu dengan mengamati populasi pada waktu-waktu diskrit, sebut saa $t_0, t_1, \ldots t_k, \ldots$

Model Leslie menetap kan bahwa kurun waktu antara dua waktu pengamatan yang berurutan adalah sama dengan kurun waktu interval umur, dapat ditulis sebagai:

$$\begin{gathered} t_0 = 0, \\ t_1 = M/n, \\ t_2 = 2M/n, \\ \vdots \\ t_k = k\,M/n. \end{gathered}$$

Dengan dugaan, maka semua wanita/betina di kelompok ke $(\,i+1)$ pada waktu t_{k+1} berada dalam kelompok ke$-i$ pada waktu t_k. Proses kelahiran dan kematian antara dua waktu pengamatan yang berurut bias dijelaskan menggunakan parameter demografi seperti table 2.2

Tabel 2.2 Parameter model

Parameter Model	Keterangan
a_i $i = 1,2, \dots , n$	Jumlah rata-rata anak yang dilahirkan seorang wanita yang berada di kelompok ke-i
b_i $i = 1,2, \dots , n$	Banyak wanita dalam kelompok umurke-i yang diharapkan hidup dan sampai ke kelompok umur ke-i

Dari definisi, akan diperoleh bahwa

(i) $a_i \geq 0$ untuk $i = 1,2, . . , n,$

(ii) $0 < b_i \leq 1$ untuk $i = 1,2, \dots , n - 1.$

Diketahui, b_i tidak boleh sama dengan nol, sebab jika nol maka tidak ada wanita yang hidup sesudah kelompok ke-i. Kemudian dianggap sedikit-dikitnya ada satu a_i yang positif maka akan terjadi kelahiran. Setiap kelompok umur dimana a_i bernilai positif dinamakan kelompok umur subur (*fertile age class).*

Selanjutnya didefinisikan vektor distribusi umur x^k pada waktu t_k dengan

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1}^{(k)} \\ \boldsymbol{x_2}^{(k)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n}^{(k)} \end{bmatrix},$$

Dimana $x_i{}^k$ banyaknya wanita/betina kelompok umur ke-i pada waktu t_k. Saat waktu t_k, wanita-wanita di kelompok pertama adalah putri dari wanita-wanita yang lahir antara waktu t_{k-1} dan waktu t_k. Sehingga bisa dituliskan

$$\left\{\begin{matrix} banyak \\ wanita \\ dikelompok \\ saat \\ waktu\ t_k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} banyaknya \\ putri\ yang \\ dlahirkan \\ dalam \\ kelompok\ 1 \\ antara\ t_{k-1} \\ dan\ waktu\ t_k \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} banyaknya \\ putri\ yang \\ dilahirkan \\ dalam \\ kelompok\ 2 \\ antara\ t_{k-1} \\ dan\ waktu\ t_k \end{matrix}\right\} +..+ \left\{\begin{matrix} banyaknya \\ putri\ yang \\ dilahirkan \\ dalam \\ kelompok\ n \\ antara\ t_{k-1} \\ dan\ waktu\ t_k \end{matrix}\right\}$$

Secara matematis,

$$x_1{}^k = a_1 x_1{}^{(k-1)} + a_2 x_2{}^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n{}^{(k-1)} \tag{2.1}$$

Banyak wanita di kelompok umur ke $(i + 1)(i = 1,2, \dots , n - 1)$ saat waktu t_k yaitu wanita dikelompok ke-i saat t_{k-1} masih hidup saat waktu t_k. Jadi

$$\begin{Bmatrix} banyak\ wanita \\ kelompok\ i+1 \\ saat\ t_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} jumlah\ wanita\ kelompok\ i \\ yang\ hidup\ hingga \\ kelompok\ i+1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} banyak\ wanita \\ kelompok\ i \\ saat\ t_{k-1} \end{Bmatrix}$$

Atausecaramatematis:

$$x_{i+1}{}^{(k)} = b_i x_i{}^{(k-1)}, i = 1,2, \dots, n-1 \tag{2.2}$$

Dengan notasi matriks, persamaan (2.1) & (2.2) bias dituliskan dalam

$$\begin{bmatrix} x_1{}^{(k)} \\ x_2{}^{(k)} \\ x_3{}^{(k)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^{(k-1)} \\ x_2{}^{(k-1)} \\ x_3{}^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Atau

$$\mathbf{x}^{(k)} = L\mathrm{x}^{(k-1)}, \mathrm{k} = 1, 2,.. \tag{2.3}$$

Untuk L adalah Matriks Leslie

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Dari persamaan (2.4) diperoleh

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} = L\mathbf{x}^{(1)} = L^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} = L\mathbf{x}^{(2)} = L^3\mathbf{x}^{(0)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(k-1)} = L^k\mathbf{x}^{(0)} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Sehingga diketahui distribusi umur permulaan $\mathbf{x}^{(0)}$ dan Matriks L, dapat ditentukan distribusi umur wanita pada sebarang waktu.

Persamaan (2.5) menyatakan distribusi umur populasi pada sebarang waktu. Tetapi persamaan (2.5) juga tidak memberi gambaran tentang dinamika proses pertumbuhan. Sehingga perlu di cari nilai eigen dan vektor Matriks Leslie. Nilai eigen dari L adalah akar dari polynomial karakteristiknya. Polynomial karakteristik Matriks Leslie sebagai berikut:

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} \dots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1}$$

Jika $p(\lambda) = 0$, maka

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} \dots - a_nb_1b_2 \dots b_{n-1} = 0$$

Ke-2 ruas dibagi dengan λ^n, menjadi

$$1 = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_n b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots\ b_{n-1}}{\lambda^n}$$

maka $q(\lambda) = 1$ untuk $\lambda \neq 0$, atau

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_n b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}{\lambda^n} \qquad (2.6)$$

Ditunjukkan bahwa $q(\lambda)$ menurun secara monoton untuk λ lebih besar dari nol. Selanjutnya, $q(\lambda)$ memiliki asimtot vertikal pada $\lambda = 0$ dan mendekati $\lambda \to \infty$. Akibatnya terdapat λ yang unik, misalkan $\lambda = \lambda_1$, sehingga $q(\lambda_1) = 1$. Artinya matriks matriks L mempunyai nilai eigen positif yang unik. Ditunjukkan bahwa, λ_1 mempunyai multipilitas 1, yaitu λ_1 bukan merupakan akar berulang dari persamaan karakteristik. Misal diambil $x_1 = 1$, maka vektor eigen**x**yang bersesuaian dengan λ_1 adalah

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/{\lambda_1}^2 \\ b_1 b_2 b_n/{\lambda_1}^n \\ \vdots \\ b_1 b_2 \ldots/{\lambda_1}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

Teorema 2.1
Sebuah Matriks Leslie L mempunyai nilai eigen positif yang unik λ_1. Nilai eigen tersebut memiliki multiplisitas 1 dan memiliki sebuah vektor eigen $\boldsymbol{x}_1$ yang entrinya semua positif.

Terorema 2.2
Jika $\lambda_1$adalah nilai eigen positif yang unik dari Matriks Leslie L dan bila λ_i sebarang nilai eigen riil atau kompleks dari L, sehingga $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.
Teorema 2.3
Bila entri berurutan a_i dan a_{i+1} di baris pertama sebuah Matriks Leslie L tidak sama dengan nol dan nilai eigen positif dari L adalah dominan.

Dianggap syarat teorema 2.3 terpenuhi. Pada kasus ini, L memiliki n nilai eigen, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tidak perlu berbeda satu sama lain, dan vektor eigen bebas linear $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_{n,}$

yang bersesuaian dengan nilai eigen. Ditempatkan nilai eigen λ_1 yang dominan duluan. Akan di buat matriks R dengan kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen dari L.

$$R = [x_1|x_2|x_3|\dots|x_n]$$

$$\begin{aligned} LR &= L[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3|\dots|\mathbf{x}_{\mathrm{n}}] \\ &= [L\mathbf{x}_1|L\mathbf{x}_2|L\mathbf{x}_3|\dots|L\mathbf{x}_{\mathrm{n}}] \\ &=[\lambda_1\mathbf{x}_1|\lambda_2\mathbf{x}_2|\lambda_3\mathbf{x}_3|\dots|\boldsymbol{\lambda}_n\mathbf{x}_n] \\ &= [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3|\dots|\mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = RD \end{aligned}$$

Sebab vector kolom matriks R bebas linear, dan R bisa dibalik sehingga matriks L dapat di diagonalisasi. Diagonalisasi dari L tuliskan oleh persamaan:

$$L = RDR^{-1}$$

$$L = R\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = R^{-1}$$

$$L^k = R\begin{bmatrix}\lambda_1{}^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2{}^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n{}^k\end{bmatrix} = R^{-1}$$

untuk$k = 1, 2, \dots$

Untuk sebarang vektor distribusi umur mula-mula $\mathbf{x}^{(0)}$ diperoleh

$$L^k\mathbf{x}^{(0)} = R\begin{bmatrix}\lambda_1{}^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2{}^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n{}^k\end{bmatrix}R^{-1}\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$$

Untuk $k = 1, 2, \dots$

Dengan membagi kedua ruas persamaan dengan λ_1^k dan dengan kenyataan bahwa $\mathbf{x}^{(\boldsymbol{k})} = L^{(k)}\mathbf{x}^{(0)}$, akan diperoleh

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)} = R\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\end{bmatrix}R^{-1}\mathrm{x}^{(0)} \tag{2.8}$$

Karena $\lambda_1$adalah nilai eigen yang dominan yaitu $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, sehingga $\left|{}^{\lambda_1}/_{\lambda_I}\right| < 1$, untuk $i = 2,3, \ldots, n$. Jelas $(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0$, jika $k \to \infty$ untuk $i = 2,3, \ldots, n$. Dengan kenyataan ini, dapat diambil limit dari kedua ruas dari (2.10) untuk mendapat

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = R\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}R^{-1}\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} \tag{2.9}$$

Lalu akan dinyatakan entri pertama dari vektor kolom $R^{-1}\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$dengan konstana c,maka

$$R^{-1}\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} = \begin{bmatrix}c\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{bmatrix},$$

Kemudian hasil ini di masukkan ke Persamaan (2.11),

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = R\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3|\ldots|\mathbf{x}_n]\text{a}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3|\ldots|\mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}c\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = c\mathbf{x}_1$$

Ruas kanan (2.11) ditulis sebagai $c\mathbf{x}_1$, dimana c konstanta yang positif yang bergantung pada vektor distribusi umur mula-mula $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}$**.** Sehingga (2.11) menjadi

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{x}^{(k)}\right\} = c\mathbf{x}_1 \tag{2.11}$$

persamaan (2.12) memberikan aproksimasi

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k\mathbf{x}_1 \tag{2.12}$$

Untuk nilai-nilai k yang besar. Dari (2.13) diperoleh

$$\mathbf{x}^{(k-1)} \simeq c\lambda_1^{k-1}\mathbf{x}_1 \tag{2.13}$$

Dan dengan membandingkan Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.14) diperoleh

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1\mathbf{x}^{(k-1)} \tag{2.14}$$

Untuk nilai k yang besar. Berarti untuk nilai waktu yang besar setiap vektor distribusi umur adalah kelipatan skalar dari distribusi umur sebelumnya, dan skalar tersebut adalah nilai eigen positif Matriks Leslie. Akibatnya, perbandingan wanita dalam setiap kelompok dari kelompok-kelompok umur menjadi konstan. Tinjau lagi persamaan (2.13) yang memberi vektor distribusi umur dari populasi tersebut untuk waktu yang lama:

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c\lambda_1^k \mathbf{x}_1 \tag{2.15}$$

Akan muncul tiga kasus sesuai dengan nilai eigen λ_1:

(i) Jumlah populasi pada akhirnya akan cenderung bertambah/meningkat jika $\lambda_1 > 1$,
(ii) Populasi akan cenderung menurun jika $\lambda_1 < 1$,
(iii) Populasi akan cenderung stabil/tetap jika $\lambda_1 = 1$. Apabila jumlah populasi cenderung menurun dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bernilai negatif, sedangkan bila jumlah populasi meningkat dapat dikatakan bahwa laju pertumbuhan populasi bernilai positif.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini memprediksi angka kelahiran dan harapan hidup wanita di Provinsi Papua Barat.

Tabel 3.1 Jumlah Penduduk Wanita dan Anak Provinsi Papua Barat yang lahir Tahun 2010-2020

Kelas umur	**Jumlah Wanita Tahun 2010**	**Jumlah Anak yang lahir**	**Jumlah Wanita Tahun 2020**
0-4	41.866,00	0	53.994,00
5-9	39.438,00	0	50.861,00
10-14	37.118,00	0	47.871,00
15-19	34.950,00	965.111	45.075,00
20-24	35.290,00	582.691	45.514,00
25-29	35.657,00	282.727	45.987,00
30-34	34.004,00	127.219	43.855,00
35-39	27.864,00	77.556	35.936,00
40-44	22.262,00	56.522	28.711,00
45-49	17.768,00	0	22.916,00
50-54	13.324,00	0	17.184,00
55-59	9.093,00	0	11.728,00
60-64	5.627,00	0	7.257,00
65+	3.246,00	0	4.186,00
Total	357.507,00	2.091.826	461.075,00

Tabel 3.4. Angka Kesuburan dan Harapan Hidup Wanita

Kelasumur	$\boldsymbol{a_i}$	b_i
0-4	0	1,2896
5-9	0	1,2896
10-14	0	1,2896
15-19	27,6140	1,2897
20-24	16,5115	1,2758
25-29	7,9290	1,2890
30-34	3,7412	1,2897
35-39	2,7833	1,2896

40-44	2,5389	1,2897
45-49	0	1,2897
50-54	0	1,2897
55-59	0	1,2898
60-64	0	1,2897
65+	0	1,2896

Selanjutnya dicari proses pertumbuhan berdasarkan nilai eigen dan vektor eigen matriks Leslie. Dengan menggunakan persamaan pendekatan untuk distribusi umur pembatas $\mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(k-1)}$ untuk mencari laju pertumbuhan penduduk wanita.

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 27{,}6140 & 16{,}5115 & 7{,}9290 & 3{,}7412 & 2{,}7833 & 2{,}5389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}28969 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}27579 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2890 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2870 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28967 & 0 \end{bmatrix}$$

Diketahui $p = 4$ yang berarti empat tahun mendatang. Sehingga dari persamaan $\mathrm{L}^{\mathrm{P}}\mathbf{x}^{(\mathrm{k}-1)}$diperoleh :

$$L^P X^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 27{,}6140 & 16{,}5115 & 7{,}9290 & 3{,}7412 & 2{,}7833 & 2{,}5389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}28969 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}27579 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2890 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2870 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28967 & 0 \end{bmatrix}^4 \times \begin{bmatrix} 53.994{,}00 \\ 50.861{,}00 \\ 47.871{,}00 \\ 45.075{,}00 \\ 45.514{,}00 \\ 45.987{,}00 \\ 43.855{,}00 \\ 35.936{,}00 \\ 28.711{,}00 \\ 22.916{,}00 \\ 17.184{,}00 \\ 11.728{,}00 \\ 7.257{,}00 \\ 4.186{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.696.614 \\ 6.352.375 \\ 6.031.702 \\ 5.785.986 \\ 1.493.364 \\ 1.406.711 \\ 1.324.014 \\ 1.246.682 \\ 1.258.824 \\ 1.271.906 \\ 1.212.940 \\ 99.392 \\ 79.409 \\ 63.381 \end{bmatrix}$$

Jadi prediksi total dari jumlah penduduk perempuan pada tahun 2024 di Provinsi Papua adalah:

$$6.696.614 + 6.352.375 + 6.031.702 + 5.785.986 + 1.493.364 + 1.406.711$$

$$+1.324.014 + 1.246.682 + 1.258.824 + 1.271.906 + 1.212.940 + 99.392 += 34.323.300$$

Selanjutnya, diprediksi laju pertumbuhan penduduk perempuan dengan menggunakan nilai eigen (λ) dari Matriks Leslie. Menghitung nilai eigen dari Matriks Leslie menggunakan persamaan $(\det(A - \lambda I) = 0)$

$$\det\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 27{,}6140 & 16{,}5115 & 7{,}9290 & 3{,}7412 & 2{,}7833 & 2{,}5389 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}28969 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}27579 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2890 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28968 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2897 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2870 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}28967 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

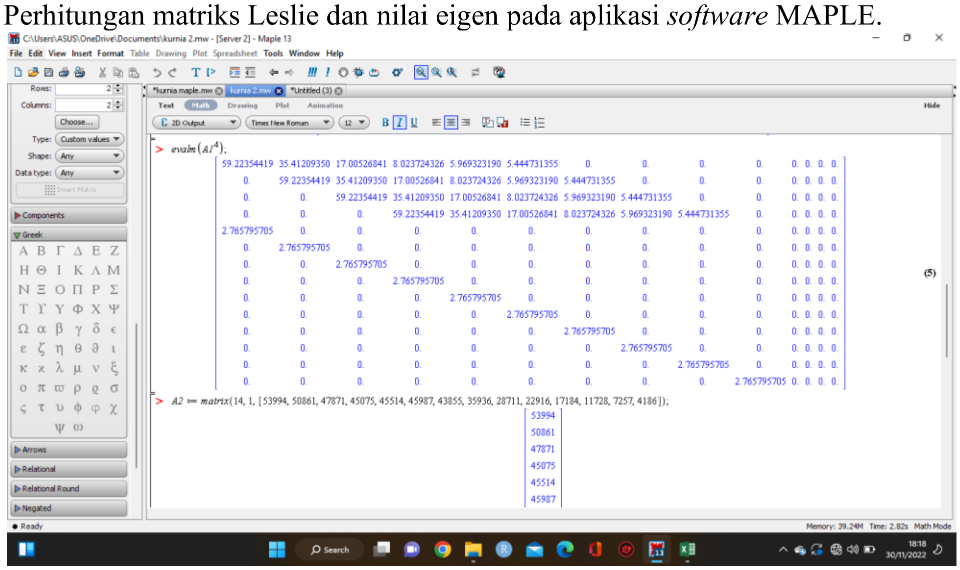
Dengan menggunakan ekspansi kofaktor diperoleh persamaan karakteristik sebagai :

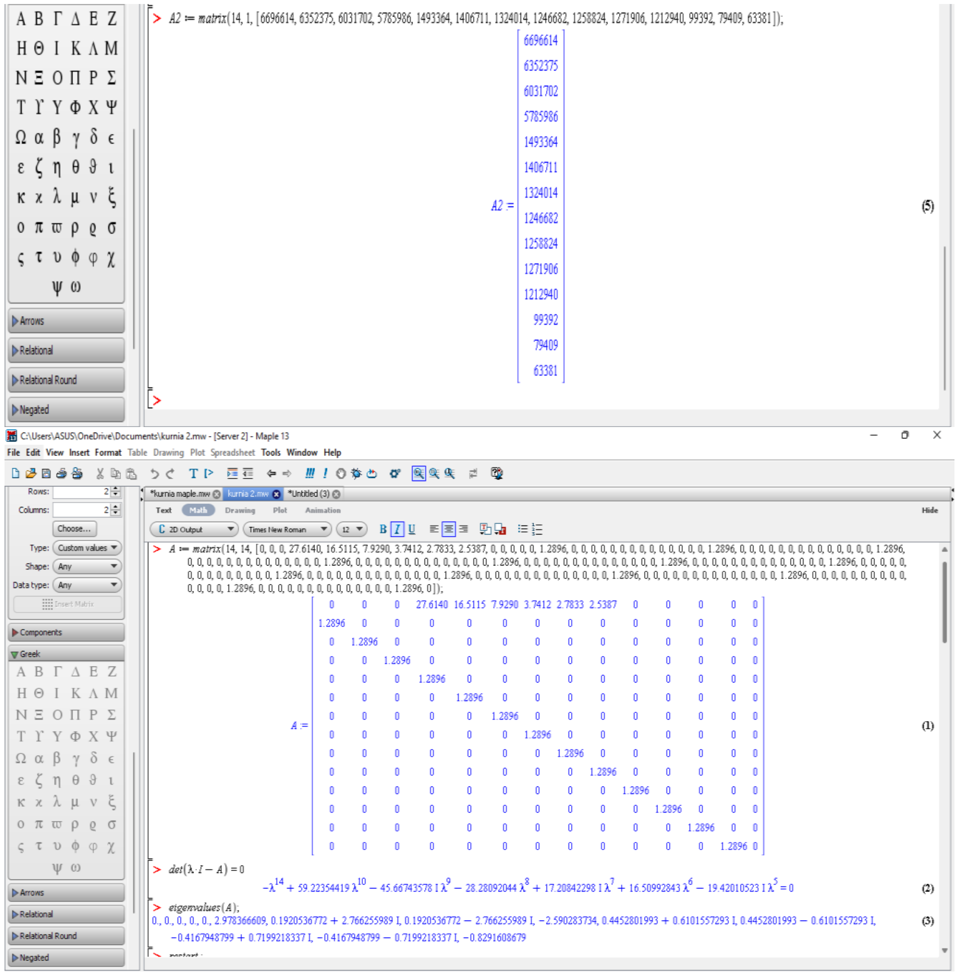
$$\lambda^{14} - 59.2234\lambda^{10} - 45.6674\lambda^{9} - 28.2809\lambda^{8} - 17.2084\lambda^{7} - 16.5099\lambda^{6} - 19.4201\lambda^{5} = 0$$

Dari persamaan karakteristiknya kemudian diselesaikan dengan menggunakan aplikasi *Maple* untuk memperoleh nilai-nilai eigennya. Nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 = 2.9784, \lambda_2 = 0.1921 + 2.7663i,\ \lambda_3 = 0.1921 - 2.7663i,\ \lambda_4 = -2.5903\ , \lambda_5 = 0.4453 + 0.6102i, \lambda_6 = 0.4453 - 0.6102i,\ \lambda_7 = -0.4168 + 0.7199\text{i}, \lambda_8 = \ -0.4168 - 0.7199i, \lambda_9 = \ -0.8292$.

Berdasarkan persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dan *teorema 3.1* nilai eigen yang dominan adalah $\lambda_1 = 2.9784$, karena nilai eigen dominan lebih besar dari 2, maka nilai ini menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi wanita Provinsi Papua Barat cenderung naik.

Perhitungan matriks Leslie dan nilai eigen pada aplikasi *software* MAPLE.





Pada penelitian [7] dalam mempediksi laju pertumbuhan penduduk wanita di Kota Makassar didapatkan nilai eigennya adalah $\lambda_1 = 1{,}01$ sehingga $\lambda_1 > 1$ yang menunjukkan bahwa laju pertumbuhan penduduk wanita di Kota Makassar cendrung naik. Sedangkan, penelitian [12] yang dilakukan di Kabupaten Situbondo dimana hasil dari nilai eigen dominan diperoleh λ_1= 0,822923894018212. Sehingga $\lambda_1 < 1$, maka laju pertumbuhan wanita di Kabupaten Situbondo pada Tahun 2023 cenderung mengalami penurunan.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Matriks Leslie dengan karakteristiknya telah mampu memberikan solusi pemecahan masalah, dalam masalah ini digunakan untuk memperdiksi jumlah dan laju pertumbuhan penduduk di Provinsi Papua Barat.
2. Hasil pengaplikasian Matriks Leslie menunjukkan bahwa jumlah penduduk Provinsi Papua Barat. Prediksi jumlah penduduk Perempuan tahun 2024 dalam skala empat tahun sebanyak 34.323.300 jiwa. Hal ini menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi Wanita di Papua Barat pada tahun 2024 cenderung meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anggreini Dewi dan Ratri Candra Hastari. 2017. Penerapan Matriks Leslie pada Angka Kelahiran dan Harapan Hidup Wanita di Provinsi Jawa Timur. *Pythagoras: Jurnal Pendi dikan MatematikaPendidikan Matematika*, *12*(2); 109–122.

[2] Badan Pusat Statistik. 2022. *tentang BPS.* hhttps://ww.bps.go.id/menu/1/informasi-umum.html. Diakses : 8 Agustus2022

[3] Badan Pusat Statistik Provinsi Papua Barat. 2021. Proyeksi Penduduk Menurut Golongan Umur (jiwa),2010-2020. In Badan Pusat Statistik Provinsi Papua Barat.

[4] Corazon, C. M., Muda, Y., Hasanah, N., Matematika, J., Sains, F., & Suska, U. I. N. 2017. Aplikasi Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah Dan Laju Pertumbuhan Perempuan Di Provinsi Riau Pada Tahun 2017. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistik*, *2*(I).

[5] Howard Anton, C. R. 2004. *aljabar linear elementer* (5th ed.). Erlangga. Jakarta

[6] Howard Anton, C. R. 2013. *Elementary Linear Algebra: Aplication Version (11th ed).* WileyJhon & sons, Inc. Canada.

[7] Sanusi, W., Sukarna, S., & Ridiawati, N. 2019. Matriks Leslie dan Aplikasinya dalam Memprediksi Jumlah dan Laju pertumbuhan Penduduk di Kota Makassar. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *1*(2), 142.

[8] Kariadinata, R. 2013. Aljabar Matriks Elementer. *Cv Pustaka Setia*. Bandung.

[9] Sistem Informasi Rujukan Statistik. 2022. *Angka kelahiran.* https://sirusa.bps.go.id/sirusa/index.php/indikator/157. Diakses: 09 November 2022

[10] Sistem Informasi Rujukan Statistik. 2022. *Angka harapan hidup.* https://sirusa.bps.go.id/sirusa/index.php/indikator/48. [9November 2022]

[11] Sugiantari, A. P., & Budiantara, I. N. 2013. Analisis Faktor-faktor yang Mempengaruhi Angka Harapan Hidup di Jawa Timur Menggunakan Regresi Semiparametrik Spline. *Jurnal Sains Dan Seni Pomits*, *2*(1), D37–D41.

[12] Wijaya, U. I. 2023. Analisis Implementasi Matriks Leslie dalam Estimasi Laju Pertumbuhan Populasi Wanita di Kabupaten Situbondo (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

[13] Yudha Pratama, B. P. N. K. 2013. Aplikasi Matriks Leslie Untuk Memprediksi Jumlah Dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi. *Bimaster*, *2*(03), 163–172.